$\Leftrightarrow h(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{Log}(y(2-y)) = x$

$\Leftrightarrow \text{Log}(y(2-y)) = 2x \Leftrightarrow y(2-y) = e^{2x}$

$\Leftrightarrow -y^2 + 2y - e^{2x} = 0$

$(\Delta' = 1 - e^{2x} \geq 0 \quad \text{car } x \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq 1)$

$\Leftrightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{1-e^{2x}}}{-1}$ ou $y = \frac{-1 + \sqrt{1-e^{2x}}}{-1}$

$\Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1-e^{2x}}$ ou $y = 1 - \sqrt{1-e^{2x}}$

Comme $y \in]0,1]$ donc $y = 1 - \sqrt{1-e^{2x}}$ car $1+\sqrt{1-e^{2x}} \geq 1$

Par suite $\forall x \in J =]-\infty;0]; h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-e^{2x}}$.

3/a- Soit $\alpha \in]0,1]$. $g(x) = g(\alpha)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{Log}(x(2-x)) = \frac{1}{2}\text{Log}(\alpha(2-\alpha))$

$\Leftrightarrow x(2-x) = \alpha(2-\alpha) \Leftrightarrow 2(x-\alpha) + (x^2 - \alpha^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-\alpha)(2-(x+\alpha)) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = 2-\alpha$.

Or $\alpha \in]0,1] \Leftrightarrow -1 < -\alpha \leq 0 \Leftrightarrow 1 < 2-\alpha \leq 2$.

Conclusion les solutions dans $]0,2[$ sont : α et $2-\alpha$.

b- $G = h^{-1} \circ g$

G est définie sur $]0,2[$

h^{-1} est définie sur $J=]-\infty;0]$

$\forall x \in]0,2[; g(x) \in J=]-\infty;0]$

$\Rightarrow G=h^{-1} \circ g$ est définie sur $]0,2[$

• $\forall x \in]0,2[; G(x) = h^{-1}(g(x)) = 1 - \sqrt{1-e^{2g(x)}}$

$= 1 - \sqrt{1-e^{\text{Log}(x(2-x))}} = 1 - \sqrt{1-x(2-x)}$

$= 1 - \sqrt{x^2-2x+1} = 1 - \sqrt{(x-1)^2} = 1 - |x-1|$

Si $x \in]0,1]; G(x) = 1 + (x-1) = x$.

Si $x \in]1,2[; G(x) = 1 - (x-1) = 2 - x$.

C-1/a- f_n est continue sur $[0,2] \Rightarrow f_n$ possède des primitives sur $[0,2]$

Désignons par Ψ_n la primitive de f_n qui s'annule en 0

$\Rightarrow \forall x \in [0,2]; \Psi_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

D'autre part posons $u : \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \text{IR}, \theta \mapsto 1 + \sin\theta$.

• $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin\theta \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ on a $u(\theta) = 1+\sin\theta \in [0;2]$.

D'où $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ on a $F_n(\theta) = \Psi_n(u(\theta))$ existe.